

C^* -algebry
Lista 6

Zad 1. Pokazać, że $*$ -homomorfizm $\Psi : A \rightarrow B$ między C^* -algebrami A i B zachowuje elementy dodatnie, pierwiastek oraz moduł, tzn. $\Phi(A^+) \subseteq B^+$, $\Phi(\sqrt{a}) = \sqrt{\Phi(a)}$ dla każdego $a \in A^+$ oraz $\Phi(|a|) = |\Phi(a)|$ dla każdego $a \in A$ zachowuje moduł, tzn. $\Phi(|a|) = |\Phi(a)|$ dla każdego $a \in A$.

Zad 2. Niech $\Lambda = \{a \in A : a \geq 0, \|a\| < 1\}$ będzie zbiorem ściśle kontraktywnych elementów dodatnich w C^* -algebrze A . Pokazać, że wzór

$$K(a) = a(1+a)^{-1} = 1 - (1+a)^{-1}, \quad a \in A^+$$

poprawnie zadaje odwracalne odwzorowanie $K : A^+ \rightarrow \Lambda$ zachowujące porządek, gdzie

$$K^{-1}(a) = a(1-a)^{-1} = (1-a)^{-1} - 1, \quad a \in \Lambda.$$

Ponadto, uzasadnić, że dla dowolnych $a, b \in \Lambda$ kładąc $c = K(K^{-1}(a) + K^{-1}(b))$ mamy $a, b \leq c \in \Lambda$. Wyciągnąć stąd wniosek, że zbiór Λ jest zbiorem skierowanym.

Zad 3. Niech $\mu = \{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sieć kontraktywnych elementów dodatnich w C^* -algebrze A . Uzasadnić, że następujące warunki są równoważne:

- 1) μ jest (dwustronną) jedyneką aproksymatywną, tzn. $\mu_\lambda a \rightarrow a$ oraz $a\mu_\lambda \rightarrow a$ dla dowolnego $a \in A$.
- 2) μ jest lewostronną jedyneką aproksymatywną, tzn. $\mu_\lambda a \rightarrow a$ dla dowolnego $a \in A$.
- 3) μ jest prawostronną jedyneką aproksymatywną, tzn. $a\mu_\lambda \rightarrow a$ dla dowolnego $a \in A$.
- 4) $\mu_\lambda a \rightarrow a$ dla dowolnego $a \in A^+$.

Zad 4. Pokazać, że jeżeli A jest ośrodkową C^* -algebrą, to posiada jedyneką aproksymatywną, która jest ciągiem. Hint: Patrz np. Uwaga 3.1.1 w Murphy

Zad 5 (Operatory rzędu pierwszego). Niech H będzie przestrzenią Hilberta (z iloczynem skalarnym liniowym ze względu na drugą współrzędną). Pokazać, że dla dowolnych dwóch elementów $x, y \in H$ wzór

$$\Theta_{x,y}(z) = \langle y, z \rangle x, \quad z \in H$$

definiuje operator $\Theta_{x,y} : H \rightarrow H$ ograniczony o normie $\|\Theta_{x,y}\| = \|x\| \cdot \|y\|$ oraz każdy operator na H , którego obrazie ma wymiar co najwyżej 1 jest tej postaci. Ponadto dla dowolnych $x, y, z, w \in H$ oraz $a \in B(H)$ mamy:

$$\theta_{x,y}\theta_{z,w} = \langle y, z \rangle \theta_{x,w}, \quad \theta_{x,y}^* = \theta_{y,x}, \quad a\theta_{x,y} = \theta_{ax,y}, \quad \theta_{x,y}a = \theta_{x,a^*y}$$

Zad 6 (Operatory skończonego rzędu). Pokazać, że zbiór operatorów skończonego rzędu (tzn. operatorów liniowych, których obraz ma wymiar skończony) na przestrzeni Hilberta H pokrywa się z przestrzenią liniową

$$F(H) = \text{span}\{\theta_{x,y} : x, y \in H\}.$$

Wyciągnąć stąd wniosek, że operatory takie tworzą samosprężony (niekoniecznie domknięty) ideał w $*$ -algebrze $B(H)$. Pokazać, że każdy niezerowy ideał I w $B(H)$ zawiera $F(H)$.

Zad 7 (Ideał operatorów zwartych). Elementy zbioru $K(H) = \overline{F(H)}$ nazywamy *operatorami zwartymi* na przestrzeni Hilberta H . Pokazać, że $K(H)$ jest domkniętym ideałem w $B(H)$ oraz jeśli $\dim(H) = \infty$, to jest to jedyny nietrywialny ideał w $B(H)$. W szczególności $K(H)$ jest prostą C^* -algebrą.

Zad 8. Niech $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta H . Uzasadnić, że ciąg rzutów ortogonalnych $\{p_n\}_{n=1}^\infty$, gdzie p_n jest rzutem na n -wymiarową przestrzeń $\mathbb{C}e_1 + \dots + \mathbb{C}e_n$, jest dodatnią jedyneką aproksymatywną w $K(H)$.